Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

OPTION A

EXERCICE :

1. Montrer que la fonction $G(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2+\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$ est constante sur $\mathbb{R}$. Que vaut cette constante ?
   En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, utile pour la suite.
2. Pour $a > 0$ et $b \geq 0$ on pose : $I(a,b)=\int_0^{+\infty} e^{-a^2u^2-\frac{b^2}{u^2}}.du$.
   Au moyen de 1., calculer $I(a,0)$.
   Justifier l'existence de l'intégrale $I(a,b)$ pour $a > 0$ et $b \geq 0$.
3. Etablir : $I(a,b)=\frac{1}{a}I(1,ab)$, puis pour $b > 0$:
$$\frac{\partial I}{\partial b}(a,b)=-2bI(b,a).$$
4. Quelle équation différentielle du 1er ordre est vérifiée par la fonction $b \to I(a,b)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$?
   En déduire la valeur de $I(a,b)$.

PROBLÈME :

On utilise les conventions usuelles d'écriture du calcul matriciel.

Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est spontanément écrit en colonne $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Si on veut l'écrire en ligne, on écrit $x^T=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$. De sorte que si *y* est un autre vecteur de $\mathbb{R}^n$: $x^Ty=y^Tx$ désigne le produit scalaire usuel de *x* par *y*.

Pour un vecteur fixe g de $\mathbb{R}^n$, et B une matrice symétrique fixe nxn, on définit la fonction m de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$m(p)=g^Tp+\frac{1}{2}p^TBp.$$
Le but du problème est l'étude du minimum (éventuel) de *m* sur les boules $\|p\|=\sqrt{p^Tp} \leq \alpha$ (où $0 \leq \alpha \leq +\infty$).

I - 1. Montrer que si g appartient à Im (*B*) et que *B* est semi définie positive (c'est-à-dire $p^TBp \geq 0$ pour tout p de $\mathbb{R}^n$) m possède un minimum (global) sur $\mathbb{R}^n$. Indication : calculer $m(-p+w)-m(-p)$ lorsque *p* vérifie *Bp* =*g* et *w* est quelconque dans $\mathbb{R}^n$.

2. En utilisant des coordonnées pour le vecteur *g* et la matrice *B*, calculer le gradient $\nabla m(p)$ de *m* en *p*.

3. En déduire, réciproquement, que si *m* possède un minimum (global) sur $\mathbb{R}^n$: g appartient à $\mathrm{Im}(B)$ et *B* est semi définie positive.
4. Si *B* est définie (strictement) positive (c'est-à-dire $p^T Bp > 0$ pour tout $p \neq 0$) montrer qu'il existe un unique vecteur p^* de $\mathbb{R}^n$ en lequel *m* admet un minimum (global) strict.
5. *B* étant une matrice symétrique quelconque, montrer que *p* réalise le minimum (global) de *m* sur $\mathbb{R}^n$, si et seulement si *m(p)* est un minimum local de *m*.

II - EXEMPLE

On prend *n*=3 et $B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$.

1. A quelle condition (sur α et β) *B* est-elle semi définie positive ? définie (strictement) positive ?
2. On suppose que la 1ère condition est réalisée, mais pas la seconde.

   2.1 On prend $g = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha+\beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Montrer que *m* possède un minimum global obtenu sur une droite. Trouver l'équation de cette droite.

   2.2 Trouver un vecteur g de $\mathbb{R}^3$ pour lequel $\inf_{p\in\mathbb{R}^3} m(p) = -\infty$.

III - On suppose maintenant (et dans toute la suite) que *B* est une matrice symétrique définie (strictement) positive et on s'intéresse au problème de trouver les vecteurs *p* réalisant le minimum de *m(p)* sur la boule euclidienne $\|p\| \leq \alpha \qquad (\alpha > 0)$.

1. Pour $p \neq q$ (deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$) montrer que l'on a :

$$(p-q)^T \nabla m(q) < \mathrm{m(p)} - m(q).$$

   En déduire que la fonction $p \to m(p)$ est strictement convexe : c'est-à-dire vérifie pour $p \neq q$ et $t \in]0,1[$:

$$m(tp+(1-t)q) < tm(p)+(1-t)m(q).$$

2. Justifier l'existence d'un unique vecteur *p* (que l'on notera $p = p(\alpha)$) réalisant le minimum de *m* sur la boule de centre 0 et de rayon α.
3. Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0 : p(\alpha)$ est constant (on notera ce $p : p^*$). Pour $0 < \alpha < \alpha_0$ montrer que $p(\alpha)$ est situé sur la sphère de centre 0 et de rayon α.

4.1 En considérant la fonction

$$\psi_t(p) = m\big(p(\alpha)+t(p-p(\alpha))\big) - m\big(p(\alpha)\big) \qquad t \in [0,1].$$

Etablir pour $\alpha \in]0,\alpha_0[$ la relation

$$(p-p(\alpha))^T \nabla m(p(\alpha)) \geq 0 \text{ pour tout } p \text{ vérifiant } \|\mathrm{p}\| \leq \alpha.$$

4.2 En déduire par un raisonnement géométrique (sans utiliser de calcul) que

$$\nabla m(p(\alpha)) = -\lambda_\alpha . p(\alpha)$$

où λ_α est un scalaire ≥0.

5. Réciproquement, toujours pour $\alpha \in]0, \alpha_0[$, montrer que si $\bar{p}$ vérifie $\|\bar{p}\| = \alpha$ et $\nabla m(\bar{p}) = -\lambda \bar{p}$ (avec $\lambda \geq 0$) on obtient nécessairement : $\bar{p} = p(\alpha)$.
   Indication : Utiliser (après l'avoir justifié) le fait que $\bar{p}$ réalise le minimum (global) sur $\mathbb{R}^n$ de la fonction :

$$p \to \tilde{m}(p) = g^T p + \frac{1}{2} p^T (B + \lambda I) p .$$

IV - EXEMPLE

On prend $g = 6\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que *B* est définie (strictement) positive.
2. Déterminer p^*.
3. Déterminer la courbe $\alpha \to p(\alpha)$, (du moins une paramétrisation) pour $\alpha \geq 0$.
